CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR 1983

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES (3 h)

M - P - T - TA

N.B. 1°) Dans tout le problème, le corps de base est celui des nombres réels. E(x) désigne la partie entière du réel x.

2°) La partie I est indépendante de la partie préliminaire. La partie II ne peut se traiter qu'après étude convenable de la partie préliminaire et de la partie I.

3°) On rappelle que, si a et b sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, il existe des entiers relatifs (u,v) tels que $au + bv = 1$ (résultat connu sous le nom d'égalité de Bezout).

PARTIE PRELIMINAIRE

Soit l'équation algébrique

(E) $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$

telle que :

- $a_i \in Z$ pour tout i tel que $0 \leq i \leq n$;
- $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$.

Supposons que (E) admette une racine rationnelle $x_0 = \frac{p}{q}$, où p est un entier non nul, q un entier strictement positif, p et q étant premiers entre eux.

Montrer que p divise a_0, et que q divise a_n.

X

X X

PARTIE I

1°) a) Soit n un entier positif ou nul. Montrer, en utilisant la formule de Moivre, qu'il existe un unique polynôme P_n, de degré n, et à coefficients entiers relatifs, tel que, pour tout x réel, on ait l'égalité

$$\cos n x = P_n (\cos x)$$

b) Calculer P_0 et P_1.

c) Démontrer la relation de récurrence

$$P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - P_{n-1}(X)$$

d) Montrer que P_n est pair si n est pair, impair si n est impair, et calculer en fonction de n :

- le coefficient du terme de plus haut degré de P_n ;
- les valeurs de $P_n(1)$ et de $P_n(-1)$.

2°) Quels sont, en supposant $n \geq 1$, les zéros de P_n ? Vérifier que ceux-ci sont réels, simples et appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$. Préciser la disposition des zéros de P_{n-1} par rapport à ceux de P_n lorsque $n \geq 2$.

.../...

3°) On se propose ici d'expliciter P_n, c'est-à-dire de calculer ses coefficients.

Posons $f_n(x) = \cos nx$. De façon évidente, f_n est une solution de l'équation différentielle

$$(E_n) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0$$

On effectue sur (E_n) le changement de variable défini par $X = \cos x$.

Déterminer l'équation transformée (E'_n) de (E_n).

Montrer que P_n est une solution polynôme de (E'_n).

En déduire les coefficients de P_n. On posera :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})} a_{n,k} X^{n-2k}$$

et on vérifiera que $a_{n,k}$ s'exprime simplement à l'aide de $\frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k}$

Ecrire explicitement $P_2(X)$, $P_3(X)$, $P_4(X)$.

PARTIE II

Il est bien connu que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. On a donc

$$0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} \in Q \text{ et } \cos \frac{\pi}{3} \in Q.$$

L'objet de cette partie est de rechercher si $\frac{1}{3}$ est, ou non, l'unique rationnel r vérifiant

$$0 < r < \frac{1}{2} \text{ et } \cos r\pi \in Q$$

1°) Soit r un rationnel tel que $0 < r < \frac{1}{2}$ et $\cos r\pi \in Q$. Si $r = \frac{p}{q}$, p et q étant des naturels premiers entre eux, on a donc $1 \leq p < \frac{q}{2}$, ce qui entraîne que $q \geq 3$.

Montrer que $\cos \frac{\pi}{q}$ est rationnel. On utilisera l'égalité de Bezout et la partie I.

2°) Montrer que q n'est pas multiple de 4 (on utilisera la partie I) et en déduire que $q = h$ ou $q = 2h$, h étant un entier impair tel que $h \geq 3$.

3°) Supposons que $q = h$ entier impair, montrer que $h = 3$, puis que $p = 1$.
On utilisera la partie préliminaire.

4°) Peut-on avoir $q = 2h$?

5°) Conclure.

F I N